

Optimales Multiplexübertragungsverfahren für verzerrende Kanäle

Robert Fischer, Johannes Huber *

Lehrstuhl für Nachrichtentechnik II, Universität Erlangen–Nürnberg

Cauerstraße 7/NT, 91058 Erlangen, Germany

Tel.: +49-9131-857114, Fax: +49-9131-858849, Email: fischer@nt.e-technik.uni-erlangen.de

Übersicht — Im Beitrag wird die optimale Multiplexübertragung für verzerrende Kanäle abgeleitet. Die Optimalität bezieht sich dabei sowohl auf die Minimierung der Geräuschvarianz in den erzeugten, virtuellen Teilkanälen, als auch auf die Maximierung der mittleren wechselseitigen Information zwischen den Blöcken an Kanalein- und ausgang. Dieses Verfahren kann als Referenz für die Beurteilung blockbasierter Übertragungssysteme für intersymbolbehaftete Kanäle dienen. Die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu Orthogonal Frequency Division Multiplexing werden diskutiert.

1 Einleitung

In der Nachrichtentechnik stellt sich oft die Frage nach der gemeinsamen Nutzung eines Übertragungsmediums durch mehrere Teilnehmer. Dies entspricht einer Partitionierung eines einzigen physikalischen Kanals in viele, virtuelle, parallele Teilkanäle. Auch wenn, wie hier angenommen, nur ein Sender und ein Empfänger vorliegen, bietet sich dieses Vorgehen an, da häufig der Realisierungsaufwand dadurch gesenkt werden kann oder flexiblere Systeme entstehen. Die in der Literatur bekannten Vielfachzugriffs- oder Multiplexverfahren lassen sich dabei im wesentlichen in die Familien *Zeitmultiplex* (Time-Division Multiple Access, TDMA), *Frequenzmultiplex* (Frequency-Division Multiple Access) und *Funktionenmultiplex* (Code-Division Multiple Access) einteilen. Beim Funktionenmultiplex werden oft Impulsformen bzw. Sequenzen verwendet, welche gute Autokorrelationseigenschaften besitzen und deren Kreuzkorrelierte möglichst Null ist. Die Suche nach geeigneten Klassen von Funktionen bzw. Folgen nimmt in der Literatur breiten Raum ein (z.B. [Lük92]). Üblicherweise werden die Sequenzen in einer Transformationsmatrix zusammengefaßt, welche mit ihrer transponiert konjugierten Matrix multipliziert die Einheitsmatrix ergeben

sollte. Bei dem Entwurf dieser Folgen wird jedoch üblicherweise ein nichtverzerrender *additive white Gaussian noise* (AWGN)–Kanal angenommen. Weist das Übertragungsmedium lineare Verzerrungen und somit *Intersymbolinterferenzen* (ISI) auf, so findet ein Übersprechen zwischen den Teilnehmern statt — die Orthogonalität des Verfahrens geht verloren.

Daneben hat in den letzten Jahren *Orthogonal Frequency Division Multiplexing* (OFDM) [WE71, Bin90, SKJ95], eine spezielle Form des Frequenzmultiplexes, stark an Bedeutung gewonnen. Kern dieses Verfahrens bildet ein Paar von *Diskreter Fouriertransformation* (DFT) und deren Inverse. Durch Einfügen eines sog. *Guard-Intervalls* (partielle zyklische Wiederholung) werden die Intersymbolinterferenzen berücksichtigt. OFDM erzeugt parallele AWGN–Teilkanäle, welche unabhängig voneinander benutzt werden können. Eine Kombination von OFDM und CDMA stellt das *Multicarrier (MC) CDMA* dar (siehe z.B. [Faz93, YLF93]). Mittels OFDM werden zunächst parallele AWGN–Teilkanäle erzeugt, auf welche im nächsten Schritt ein CDMA–Verfahren mit orthogonalen Sequenzen über die Träger (oder mehrere Teilverfahren parallel) wie gewohnt angewandt werden kann. Faßt man die Transformationsmatrizen beider Systeme zusammen, so erhält man eine kompakte Darstellung des Gesamtsystems, welches letztlich ein CDMA–System für verzerrende Kanäle darstellt.

In diesem Beitrag soll die Frage nach dem optimalen Multiplexverfahren für verzerrende Kanäle beantwortet werden und die Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede zu OFDM aufgezeigt werden. Um grundlegende Aussagen zu erhalten beschränken sich dabei alle Ausführungen auf zeitinvariante ISI–Kanäle. In Kapitel 2 wird zunächst eine kompakte Beschreibung der Multiplexübertragung präsentiert. Darauf aufbauend erfolgt in Kapitel 3 die Optimierung des Systems. Dies geschieht sowohl in Hinsicht auf eine minimale Geräuschvarianz der Teilverfahren, als auch im Hinblick auf eine maximale Transinformati-

* Diese Arbeit wurde vom Technologiezentrum der Deutsche Telekom AG gefördert.

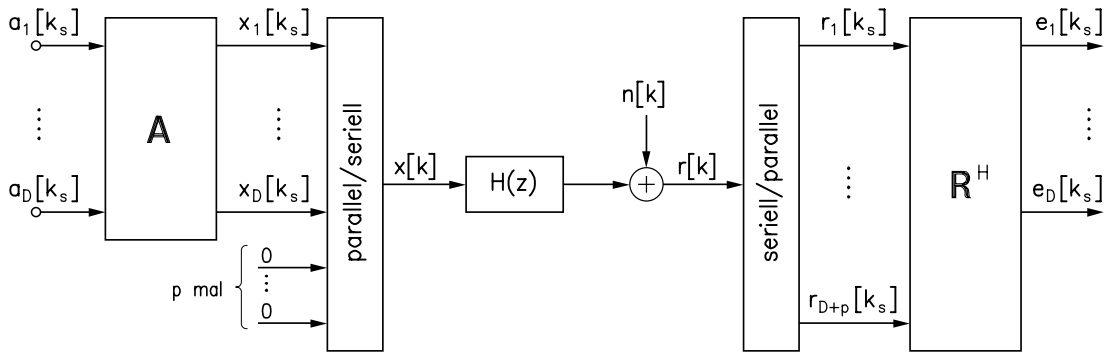


Bild 1: Blockschaltbild des Übertragungssystems zur Multiplexübertragung über verzerrende Kanäle.

on zwischen den Signalen am Kanalein- und ausgang. Der Artikel schließt mit einer Diskussion der Ergebnisse in Kapitel 4 und einer Zusammenfassung (Kapitel 5).

2 Systemmodell

In diesem Abschnitt soll zunächst eine kompakte Beschreibung für die Multiplexübertragung bereitgestellt werden. Ausgangspunkt bildet der verzerrende, analoge Kanal. Über diesen werden Sendepulse übertragen, welche sich aus D sog. *Chips* der Impulsform $T \cdot h_T(t)$ im (Kanal-) Symbolabstand T zusammensetzen. Für den i -ten Sendegrundimpuls gilt also $x_{si}(t) = T \cdot \sum_{j=1}^D a_{ij} \cdot h_T(t - jT)$. Entsprechend seien die Impulsantworten der empfangsseitigen Korrelatoren aus D_e Chips der Impulsformen $T \cdot h_E(t)$ gebildet: $x_{ei}(t) = T \cdot \sum_{j=1}^{D_e} r_{ij}^* \cdot h_E(t - jT)$. Die Chips sind dabei nichts anderes als die gegebenen Impulsantworten des Sendepulsformers und des Empfangsfilters einer pulsamplitudenmodulierten Übertragung. Eine Optimierung des Systems ist somit äquivalent mit der Suche nach endlichen Sequenzen (Vektoren) der *Chippgewichte* a_{ij} und r_{ij}^* . Faßt man die analogen Komponenten einschließlich der nachfolgenden Abtastung im Symbolintervall T zusammen, erhält man die zeitdiskrete Nutzübertragungsfunktion $H(z)$, welche als FIR-Filter vom Grad p modellierbar sei: $H(z) = \sum_{k=0}^p h[k] \cdot z^{-k}$. Ferner sei das zeitdiskrete Empfangssignal durch additives Gaußsches Rauschen $n[k]$ gestört.

Im nächsten Schritt ist nun die Behandlung der Intersymbolinterferenzen zu klären. Ein möglicher Weg ist hier das Einfügen von Nullen, das sog. *zero stuffing*. Da $H(z)$ vom Grad p ist, müßten nach jedem Nutzsymbol (mindestens) p Nullen gesendet werden um das Kanalgedächtnis zu löschen und somit Symbolinterferenzen zu vermeiden. Da aber jeweils Blöcke der Länge D ge-

sendet werden, reicht es aus erst danach p Nullen anzufügen. Für große Werte von D im Verhältnis zu p wird der Ratenverlust vernachlässigbar klein und verschwindet im Grenzübergang $D \rightarrow \infty$ ganz. Man erhält eine Übertragung, bei welcher aufeinanderfolgende Blöcke voneinander unabhängig sind, die Symbole innerhalb eines Blockes aber interferieren. Ziel ist es nun, die Blöcke sendeseitig optimal aus den Datensymbolen zu generieren und empfangsseitig optimal weiter zu verarbeiten.

Bild 1 zeigt das Blockschaltbild des Übertragungssystems¹ mit $D_e = D + p$. Zuerst werden D Datensymbole $a_i[k_s]$, $i = 1(1)D$,² zu einem Block zusammengefaßt, der mittels der $D \times D$ Matrix \mathbf{A} auf die Kanalsymbole $x_i[k_s]$, $i = 1(1)D$, abgebildet wird: $\mathbf{x}[k_s] = \mathbf{a}[k_s] \cdot \mathbf{A}$. Die Matrix $\mathbf{A} = [a_{ij}] = [\mathbf{a}_1^T \mathbf{a}_2^T \cdots \mathbf{a}_D^T]^T$ enthält dabei als Zeilenvektoren \mathbf{a}_i die oben angesprochenen Chippgewichte der analogen Sendegrundimpulse $x_{si}(t)$. Durch Parallel/Seriell-Umsetzung erhält man die Sendesequenz $\langle x[k] \rangle$. Dabei werden nach den D Nutzsymbolen p Nullen eingefügt. Nach der Übertragung über den Kanal erhält man das verzerrte und gestörte Empfangssignal $r[k]$. Dieses wird einem Seriell/Parallel-Umsetzer zugeführt, der es in $D+p$ Teilsignale (*Polyphasenkomponenten* [Sch94]) mit reduziertem Takt $T_s = T \cdot (D+p)$ aufspaltet. Mittels der $(D+p) \times D$ Matrix \mathbf{R}^H werden aus den r_i 's die Empfangssignale $e_i[k_s]$, $i = 1(1)D$, gewonnen. Die Matrix $\mathbf{R} = [r_{ij}] = [\mathbf{r}_1^T \mathbf{r}_2^T \cdots \mathbf{r}_D^T]^T$ enthält analog zu \mathbf{A} als Zeilenvektoren \mathbf{r}_i die konjugiert komplexen Chippgewichte von $x_{ei}(t)$.

Faßt man die parallelen Teilsignale zu (Zeilen-) Vektoren entsprechender Dimension zusammen, so läßt sich die Nutzübertragung kompakt als

¹Alle Signale und Systeme werden als komplexwertig angenommen.

² $i = i_1(\Delta i)i_2$: Variation der diskreten Variable i von i_1 in Schritten Δi bis i_2 .

Multiplikation des Vektors $\mathbf{x}[k_s]$ mit der $D \times D + p$ Kanalmatrix

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h[0] & h[1] & \cdots & h[p] & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \ddots & \\ 0 & & h[0] & h[1] & \cdots & h[p] \end{bmatrix} \quad (1)$$

beschreiben, welche Toeplitzstruktur besitzt. Wie schon oben erwähnt, erreicht man durch das Einfügen von p Nullen, daß sich aufeinanderfolgende Blöcke (Vektoren) nicht beeinflussen. Daher kann zu jedem Zeitpunkt k_s die Abbildung mittels der Matrix \mathbf{H} unabhängig von vorangegangenen oder nachfolgenden Blöcken betrachtet werden. In Bild 2 ist schließlich die vektorielle Beschreibung des Übertragungssystems dargestellt.

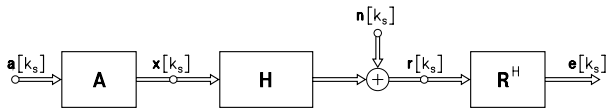


Bild 2: Vektorielle Beschreibung des Übertragungssystems.

3 Optimales Multiplexübertragungsverfahren für verzerrende Kanäle

Nachdem eine kompakte zeitdiskrete Beschreibung des Systems gefunden wurde, werden nun die Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{R} optimiert, was auf das Verfahren führt, welches in optimaler Weise eine Multiplexübertragung bei ISI-Kanälen realisiert. Dieses Problem wurde bereits von einer Vielzahl von Autoren aus unterschiedlichen Blickwinkeln behandelt (z.B. [LP76, MS88, KAC90, Lec90]), und ist unter verschiedenen Namen, so z.B. *Vector Coding* [KAC90] oder *Structured Channel Signaling* [Lec90], bekannt. Das resultierende Verfahren stellt die optimale Partitionierung eines skalaren (physikalischen) Kanals in parallele, unabhängige Teilkanäle dar.

3.1 Minimierung der Geräuschvarianz

Ziel jeder Systemoptimierung ist es, die Nutzübertragung so robust wie möglich gegenüber Störungen zu machen. Da $\mathbf{n}[k_s]$ die Kovarianzmatrix³ $\Phi_{nn} = E \left\{ \mathbf{n}^T[k_s] \mathbf{n}^*[k_s] \right\}$ besitzt, erhält man für die Varianz der

³Da nur mittelwertfreie Prozesse betrachtet werden sind Kovarianz- und Korrelationsmatrix identisch.

Rauschstörung $n'_i[k_s]$ im Signal $e_i[k_s]$, welche zu minimieren ist:

$$\begin{aligned} E \left\{ |n'_i[k_s]|^2 \right\} &= E \left\{ \mathbf{r}_i \mathbf{n}^H[k_s] \mathbf{n}[k_s] \mathbf{r}_i^H \right\} \\ &= \mathbf{r}_i \Phi_{nn}^* \mathbf{r}_i^H. \end{aligned} \quad (2)$$

Damit singuläre Lösungen vermieden werden, müssen noch folgende Nebenbedingungen eingeführt werden:

- a) Die Sendeleistung im i -ten Kanal, welche für unkorrelierte $a_i[k_s]$'s proportional zu $\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H$ ist, sei gegeben und konstant. Da sie durch $\sigma_{a_i}^2 = E \left\{ |a_i[k_s]|^2 \right\}$ bestimmt werden kann setzen wir:

$$\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H = 1. \quad (3)$$

- b) Die Nutzübertragung innerhalb der Teilkanäle sei Eins; ein Übersprechen soll vermieden werden, d.h.

$$\mathbf{a}_i \mathbf{H} \mathbf{r}_j^H = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}. \quad (4)$$

Damit ist nun das Optimierungsproblem formuliert und es lassen sich die zugehörigen D , skalaren Lagrange'schen Funktionen mit den Lagrange-faktoren $\mu_{1,i}$ und $\mu_{2,i}$ angeben:

$$\begin{aligned} L_i &= \mathbf{r}_i \Phi_{nn}^* \mathbf{r}_i^H - \mu_{1,i} \cdot (\mathbf{a}_i \mathbf{a}_i^H - 1) \\ &\quad - \mu_{2,i} \cdot (\mathbf{a}_i \mathbf{H} \mathbf{r}_i^H - 1). \end{aligned} \quad (5)$$

Nullsetzen der Gradienten⁴ nach \mathbf{r}_i^* und \mathbf{a}_i^* , $i = 1(1)D$, liefert folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{r}_i^*} = \mathbf{r}_i \Phi_{nn}^* - \mu_{2,i} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{H} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{a}_i^*} = -\mu_{1,i} \cdot \mathbf{a}_i - \mu_{2,i} \cdot \mathbf{r}_i \mathbf{H}^H \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \quad (6b)$$

Zunächst nehmen wir an, daß $\langle n[k] \rangle$ eine weiße, mittelwertfreie Gaußsche Sequenz mit Varianz σ_n^2 sei, also $\Phi_{nn} = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}_{D+p}$ gelte⁵. Zum Lösen des Gleichungssystems wird Gl. (6a) von rechts mit \mathbf{H}^H multipliziert. Der entstehende Term $\mathbf{r}_i \mathbf{H}^H$ kann mit Gl. (6b) eliminiert werden, was mit $\lambda_i = -\sigma_n^2 \mu_{1,i} / \mu_{2,i}^2$ und der Diagonalmatrix $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_D)$ der Eigenwerte λ_i schließlich auf folgendes Eigenwertproblem für die optimale Sendematrix \mathbf{A} führt:

$$\mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{\Lambda} \mathbf{A}. \quad (7)$$

⁴Die Ableitung nach einer komplexen Zahl sei entsprechend dem *Wirtingerkalkül* definiert [FL88].

⁵ \mathbf{I}_{D+p} : Einheitsmatrix der Dimension $D + p$.

Da $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ als sog. *Gramsche Matrix* [HRS86] hermitesch ist, sind alle Eigenwerte λ_i reell und die Eigenvektoren \mathbf{a}_i stehen senkrecht aufeinander. Sie können immer so normiert werden, daß sie eine Orthonormalbasis des \mathbb{C}^D bilden [BHW87], also die Matrix \mathbf{A} unitär ist:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{I}_D. \quad (8)$$

Somit ist Nebenbedingung a) erfüllt. Zur Bestimmung der Matrix \mathbf{R} folgt aus Gl. (6a) $\mathbf{r}_i = \text{const.} \cdot \mathbf{a}_i \mathbf{H}$. Mit der Nebenbedingung b) und dem Eigenwertproblem Gl. (7) lassen sich die Konstanten mit λ_i^{-1} identifizieren. Somit folgt für die optimale Empfängermatrix:

$$\mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H}. \quad (9)$$

Aus

$$\mathbf{R}\mathbf{R}^H = \mathbf{\Lambda}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \mathbf{A}^H (\mathbf{\Lambda}^{-1})^H = \mathbf{\Lambda}^{-1} \quad (10)$$

und Gl. (2) erhält man schließlich die Rauschvarianz im i -ten Teilkanal:

$$E \left\{ |n'_i[k_s]|^2 \right\} = \sigma_n^2 \cdot \lambda_i^{-1}. \quad (11)$$

Damit ist das System vollständig spezifiziert. Man erhält D unabhängige, parallele Teilkanäle mit Verstärkung 1 (Nebenbedingung Gl. (4)) und den Geräuschvarianzen σ_n^2/λ_i . Gl. (10) besagt darüber hinaus, daß die Rauschstörungen $n'_i[k_s]$ untereinander unkorreliert sind, da $\mathbf{R}\mathbf{R}^H$ bei weißer Störung bis auf eine Konstante (σ_n^2) die Kovarianzmatrix von $\mathbf{n}'[k_s] = \mathbf{n}[k_s] \mathbf{R}^H$ ist. Die Verallgemeinerung auf den Fall einer farbigen Störung ist in [Fis97] beschrieben.

3.2 Maximierung der mittleren wechselseitigen Information

Neben der Minimierung der Störvarianzen sind auch andere Kriterien für den optimalen Entwurf denkbar, wie z.B. die Maximierung des SNR. Dieses Maß liefert wie in [Fis97] gezeigt das gleiche Ergebnis wie oben. Weiterhin maximiert die gefundene Lösung auch die mittlere wechselseitige Information zwischen den sendeseitigen Signalblöcken $\mathbf{x}[k_s]$ und den Empfangsvektoren $\mathbf{r}[k_s]$ [AC96]. Das vorgestellte Verfahren stellt also im informationstheoretischen Sinne die optimale Blockübertragung über verzerrende Kanäle dar. Mittels einer einfacheren Darstellung als in [AC96] soll die Behauptung nun bewiesen werden. Auch hier soll, um die Herleitungen übersichtlich zu halten, von einer weißen Rauschstörung $\mathbf{n}[k_s]$ mit $\mathbf{\Phi}_{nn} = \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}_{D+p}$ ausgegangen werden.

Die mittlere wechselseitige Information (Transinformation) zwischen den stochastischen Variablen $\mathcal{X} = \mathbf{x}[k_s]$ und $\mathcal{R} = \mathbf{r}[k_s]$ (vgl. Bild 2) läßt sich darstellen als

$$I(\mathcal{X}; \mathcal{R}) = h(\mathcal{R}) - h(\mathcal{R}|\mathcal{X}), \quad (12)$$

wobei $h(\cdot)$ die differentielle Entropie bezeichnet. Werden Blockinterferenzen durch Einfügen von Nullen vermieden, gilt $h(\mathcal{R}|\mathcal{X}) = h(\mathcal{N})$, mit $\mathcal{N} = \mathbf{n}[k_s]$.

Nimmt man gaußverteilte Signale an, welche zum Erreichen der Kapazität erforderlich sind, so läßt sich die Transinformation als ($|\cdot|$: Determinante)

$$I(\mathcal{X}; \mathcal{R}) = \text{ld}(|\mathbf{\Phi}_{rr}|/|\mathbf{\Phi}_{nn}|) \quad (13)$$

angeben. Dabei wurde die differentielle Entropie $h(\mathcal{X}) = \text{ld}((\pi e)^D \cdot |\mathbf{\Phi}_{xx}|)$ einer D -dimensionalen, vektoriellen, Zufallsvariable \mathcal{X} mit komplexen, gaußverteilten Komponenten und Kovarianzmatrix $\mathbf{\Phi}_{xx} = E \left\{ \mathbf{x}^T[k_s] \cdot \mathbf{x}^*[k_s] \right\}$ benutzt [Pap91, CT91].

Da die statistischen Eigenschaften der Rauschstörungen nicht beeinflußt werden können, wird $I(\mathcal{X}; \mathcal{R})$ maximal falls $|\mathbf{\Phi}_{rr}| = |\mathbf{H}^T \mathbf{\Phi}_{xx} \mathbf{H}^* + \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}_{D+p}|$ maximiert wird. Dies folgt aus $\mathbf{r}[k_s] = \mathbf{x}[k_s] \cdot \mathbf{H} + \mathbf{n}[k_s]$ und der statistischen Unabhängigkeit von $\mathbf{x}[k_s]$ und $\mathbf{n}[k_s]$. Die einzige Variationsmöglichkeit bieten die stochastischen Eigenschaften des Vektors $\mathbf{x}[k_s]$. Um singuläre Lösungen zu vermeiden muß noch die Gesamtsendeleistung S vorgegeben werden, womit folgende Extremwertaufgabe mit Nebenbedingung zu lösen ist:

$$\max_{\mathbf{\Phi}_{xx}} \left\{ \left| \mathbf{H}^T \mathbf{\Phi}_{xx} \mathbf{H}^* + \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}_{D+p} \right| \right\}, \quad (14)$$

mit $\text{spur} \{ \mathbf{\Phi}_{xx} \} = S$.

Im nächsten Schritt wird die Eigenwertzerlegung $\mathbf{\Phi}_{xx} = \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A}^*$, mit der unitären Matrix \mathbf{A} und der Diagonalmatrix $\mathbf{D} = \text{diag}(d_1, \dots, d_D)$ verwendet und die Abkürzung $\mathbf{M} = \mathbf{A} \mathbf{H}$ eingeführt, womit sich die Determinante wie folgt umformen läßt:

$$\begin{aligned} & \left| \mathbf{H}^T \mathbf{A}^T \mathbf{D} \mathbf{A}^* \mathbf{H}^* + \sigma_n^2 \cdot \mathbf{I}_{D+p} \right| \\ &= \sigma_n^{2(D+p)} \cdot \left| \mathbf{M}^T \mathbf{D} \mathbf{M}^* + \mathbf{I}_{D+p} \right| \\ &= \sigma_n^{2(D+p)} \cdot \left| \mathbf{D} \mathbf{M}^* \mathbf{M}^T + \mathbf{I}_D \right|. \end{aligned} \quad (15)$$

Die Gültigkeit des letzten Schritts ist im [Fis97, Anhang B] gezeigt. Werden die Datensymbole $a_i[k_s]$ als untereinander unkorreliert vorausgesetzt, so besitzt die Kovarianzmatrix von $\mathbf{a}[k_s]$

Diagonalgestalt: $\Phi_{aa} = \mathbf{D}$. Die Eigenwertzerlegung von Φ_{xx} kann dann dahingehend interpretiert werden, daß der Vektor $\mathbf{x}[k_s]$ mittels der Matrix \mathbf{A} aus $\mathbf{a}[k_s]$ gebildet wird (vgl. oben). Die Elemente d_i stellen schließlich die Leistungen der $a_i[k_s]$'s dar.

Nach der Ungleichung von Hadamard [Pap91, CT91] wird die Determinante der Matrix $\mathbf{D}'\mathbf{M}^*\mathbf{M}^T + \mathbf{I}_D$ maximiert, wenn diese Matrix diagonal ist, also $\mathbf{M}^*\mathbf{M}^T$ selbst eine Diagonalmatrix ist. Somit folgt:

$$\mathbf{M}^*\mathbf{M}^T = \mathbf{A}^*\mathbf{H}^*\mathbf{H}^T\mathbf{A}^T \stackrel{!}{=} \mathbf{diag}(\lambda_1^*, \dots, \lambda_D^*), \quad (16)$$

bzw.

$$\mathbf{A}\mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_D)\mathbf{A}, \quad (17)$$

was das bereits bekannte Eigenwertproblem Gl. (7) darstellt. Somit ist die oben durch Minimierung der Geräuschvarianz gefundene Lösung notwendig für die Maximierung der mittleren wechselseitigen Information. Gln. (7) bzw. (17) sind aber nicht hinreichend für das Erreichen der Kapazität. Hier verbleibt noch die Bestimmung der Diagonalmatrix \mathbf{D} , welche die Leistungsverteilung auf die parallelen Ersatzkanäle beschreibt. Dazu wird die Nebenbedingung in $S = \text{spur}\{\Phi_{xx}\} = \text{spur}\{\mathbf{A}^T\mathbf{D}\mathbf{A}^*\} = \text{spur}\{\mathbf{D}\} = \sum_{i=1}^D d_i$ umgeformt und Gl. (16) in (15) eingesetzt:

$$|\mathbf{D}'\mathbf{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_D) + \mathbf{I}_D| = \prod_{i=1}^D \left(1 + \frac{d_i}{\sigma_n^2/\lambda_i}\right). \quad (18)$$

Die Extremwertaufgabe Gl. (14) ist somit in

$$\max_{d_i} \left\{ \prod_{i=1}^D \left(1 + \frac{d_i}{\sigma_n^2/\lambda_i}\right) \right\}, \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^D d_i = S, \quad (19)$$

überführt. Die Lösung dieser Aufgabe ist in der Informationstheorie unter den Namen *Water-Filling-Regel* bekannt, wonach

$$d_i + \frac{\sigma_n^2}{\lambda_i} = \text{const.} \quad (20)$$

gelten muß, und sich die Summe aus Teilsendeleistung d_i und Rauschvarianz σ_n^2/λ_i für alle Teilkanäle i jeweils zur selben Konstanten ergeben muß.

Zusammenfassend wird also die Transinformation zwischen den Sendevektoren $\mathbf{x}[k_s]$ und den Empfangsvektoren $\mathbf{r}[k_s]$ maximiert, wenn $\mathbf{x}[k_s]$ als Transformation unkorrelierter Teilsignale mittels der Matrix \mathbf{A} der Eigenvektoren von $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ gewählt wird. Die Teilsendeleistungen in den parallelen Ersatzkanälen sind gemäß der Water-Filling-Regel zu wählen.

4 Diskussion

Das vorgestellte Verfahren — interpretierbar als optimale Partitionierung eines skalaren Kanals in parallele, unabhängige Teilkanäle oder als optimale Blockübertragung über verzerrende Kanäle — liefert nach Lösen eines Eigenwertproblems die optimalen Sende- und Empfangsmatrizen. Diese Optimalität bezieht sich, wie gezeigt, sowohl auf den erreichbaren Störabstand, als auch auf die Transinformation zwischen Kanaleingang und -ausgang. Für eine Realisierung ist es aber nur bedingt geeignet. Zum einen sollte ein großes D , also viele parallele Teilkanäle, verwendet werden, um den Ratenverlust klein zu halten, andererseits wird damit die Dimension des Eigenwertproblems übermäßig groß. Weiterhin erfordert jede Änderung der Kanalcharakteristik die erneute Bestimmung von \mathbf{A} und \mathbf{R} . Das größte Problem ist jedoch, daß diese allgemeinen Matrizenmultiplikationen nicht sonderlich effizient in Hardware zu realisieren sind; speziell existieren keine schnellen Algorithmen. Deshalb ist diese optimale Lösung nicht für den praktischen Einsatz gedacht; vielmehr stellt sie die Referenz für alle suboptimalen Lösungen dar.

Zu diesen gehört im speziellen OFDM. Der Hauptunterschied zum optimalen Verfahren ist die Behandlung der Intersymbolinterferenzen. Es werden hier dem Block von Nutzsymbolen keine Nullen angefügt, sondern der Block wird (teilweise) *periodisch wiederholt*. Ferner wird empfangsseitig nicht der gesamte Block von $D + p$ Symbolen weiterverarbeitet, sondern es werden nur D Symbole entnommen. Insgesamt betrachtet läßt sich die Übertragung der Blöcke der Länge D hier als Abbildung mittels einer *zyklischen Matrix*, welche die Koeffizienten $h[k]$ der Kanalimpulsantwort enthält, beschreiben. Diese Matrix tritt an die Stelle von $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ im Eigenwertproblem Gl. (7). Da bei zyklischen Matrizen immer die DFT-Matrix $\mathbf{W} = [e^{-j\frac{2\pi}{D}ij}]$, $i, j = 1(1)D$, Modalmatrix ist, gilt hier unabhängig von der Impulsantwort $\mathbf{A} = \mathbf{W}^{-1}$ und $\mathbf{R}^H = \mathbf{W}$. Dies ist für eine Realisierung sehr vorteilhaft, da einerseits Sender und Empfänger fest vorgegeben sind und andererseits schnelle Algorithmen für die Durchführung von DFT und IDFT bekannt sind. Diese Vorteile werden aber durch eine Einbuße in der Leistungsfähigkeit erkauft. Zum einen ist die verwendete Transformation weder an den Kanal, noch an die Farbigkeit des Rauschens angepaßt, und zum anderen wird die Energie der zyklischen Erweiterung im Empfänger nicht genutzt. Für sehr große Blocklängen und ein kurz-

es Guard-Intervall sind beide Verfahren aber nahezu identisch und gehen für $D/p \rightarrow \infty$ ineinander über [RCK92]. Dies liegt daran, daß im Grenzübergang in jedem Block alle Abhängigkeiten erfaßt werden. Mathematisch ist dies daran zu sehen, daß die Töplitzmatrix $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ für sehr große D einer zyklischen Matrix sehr nahe kommt und somit \mathbf{A} gegen \mathbf{W}^{-1} konvergiert. Da alle Modifikationen von OFDM, wie z.B. MC-CDMA oder OCDM [Lin95], lediglich Transformation der parallelen AWGN-Kanäle sind, gilt auch hier prinzipiell das oben Gesagte. Dabei ist jedoch zu beachten, daß im allgemeinen Korrelationen zwischen den Störungen in den Teilkanälen erzeugt werden, welche ungenutzt bleiben (vgl. im Gegensatz dazu Gl. (10)). Liegt eine Punkt-zu-Punkt-Übertragung vor, so ist schließlich die optimale Nutzung der erzeugten parallelen Ersatzkanäle zu optimieren. Die optimale Raten- und Leistungsaufteilung ist für das Erreichen der maximalen Zuverlässigkeit von entscheidender Bedeutung [Fis97, FH96, FH97].

5 Zusammenfassung

Im Beitrag wurde die optimale Blockübertragung über linear verzerrende Kanäle vorgestellt. Es konnte gezeigt werden, daß durch optimale Wahl der sende- und empfangsseitigen Transformationen sowohl die Geräuschvarianz minimiert, als auch die mittlere wechselseitige Information zwischen Kanalein- und ausgang maximiert wird. Kernpunkt ist das Lösen eines Eigenwertproblems. Für sehr große Blocklängen kommt OFDM, ein wichtiger Vertreter der Frequenzmultiplexverfahren, nahe an die Leistungsfähigkeit des optimalen Verfahrens. Dabei ist OFDM aber wesentlich einfacher zu realisieren. Das vorgestellte System kann als Referenz für alle Übertragungsverfahren dienen, welche blockorientiert auf Intersymbolinterferenzkanälen arbeiten.

Literatur

[AC96] N. Al-Dhahir and J.M. Cioffi. Block Transmission over Dispersive Channels: Transmit Filter Optimization and Realization, and MMSE-DFE Receiver Performance. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-42, S. 137–160, Januar 1996.

[BHW87] K. Burg, H. Haff, and F. Wille. *Höhere Mathematik für Ingenieure, Band II: Lineare Algebra*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1987.

[Bin90] J.A.C. Bingham. Multicarrier Modulation for Data Transmission: An Idea Whose Time Has Come. *IEEE Communications Magazine*, S. 5–14, Mai 1990.

[CT91] T.M. Cover and J.A. Thomas. *Elements of Information Theory*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1991.

[Faz93] K. Fazel. Performance of CDMA/OFDM for Mobile Communication Systems. In *Proc. of the IEEE 2nd ICUPC*, S. 975–979, Ottawa, 1993.

[FH96] R. Fischer and J. Huber. A New Loading Algorithm for Discrete Multitone Transmission. In *IEEE Global Telecommunications Conference*, S. 724–728, London, November 1996.

[FH97] R. Fischer and J. Huber. On The Equivalence of Single- and Multicarrier Modulation: A New View. In *IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT '97)*, S. 197, Ulm, Germany, Juni/July 1997.

[Fis97] R. Fischer. *Mehrkanal- und Mehrträgerverfahren für die schnelle digitale Übertragung im Ortsanschlußleitungsnetz*. Dissertation an der Technischen Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg — Shaker Verlag, Aachen, 1997.

[FL88] W. Fischer and I. Lieb. *Funktionentheorie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, Wiesbaden, 1988.

[HRS86] U. Heute, R. Rabenstein, and P. Steffen. Matrizen und Determinanten: Eine systemtheoretisch orientierte Darstellung. Lehrstuhl für Nachrichtentechnik, Erlangen, 1986.

[KAC90] S. Kasturia, J.T. Aslanis, and J.M. Cioffi. Vector Coding for Partial Response Channels. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-36, S. 741–762, July 1990.

[Lec90] J.W. Lechleider. The Optimum Combination of Block Codes and Receivers for Arbitrary Channels. *IEEE Transactions on Communications*, COM-38, S. 615–621, Mai 1990.

[LP76] K.-H. Lee and D.P. Petersen. Optimal Linear Coding for Vector Channels. *IEEE Transactions on Communications*, COM-24, S. 1283–1290, Dezember 1976.

[Lin95] J. Lindner. Channel Coding and Modulation for Transmission over Multipath Channels. *Archiv für Elektronik und Übertragungstechnik (International Journal of Electronics and Communications)*, Band 49, S. 110–119, März 1995.

[Lük92] H.D. Lüke. *Korrelationssignale*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1992.

[MS88] H.S. Malvar and D.H. Staelin. Optimal Pre- and Postfilters for Multichannel Signal Processing. *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, ASSP-36, S. 287–289, Februar 1988.

[Pap91] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 3. Auflage, 1991.

[RCK92] A. Ruiz, J.M. Cioffi, and S. Kasturia. Discrete Multiple Tone Modulation with Coset Coding for the Spectrally Shaped Channel. *IEEE Transactions on Communications*, COM-40, S. 1012–1029, Juni 1992.

[SKJ95] H. Sari, G. Karam, and I. Jeanclaude. Transmission Techniques for Digital Terrestrial TV Broadcasting. *IEEE Communications Magazine*, S. 100–109, Februar 1995.

[Sch94] H.W. Schüßler. *Digitale Signalverarbeitung, Band I*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 4. Auflage, 1994.

[WE71] S.B. Weinstein and P.M. Ebert. Data Transmission by Frequency-Division Multiplexing Using the Discrete Fourier Transform. *IEEE Transactions on Communications*, COM-19, S. 682–634, Oktober 1971.

[YLF93] N. Yee, J.-P. Linnartz, and G.P. Fettweis. Multi-Carrier CDMA in Indoor Wireless Radio Networks. In *Proc. of the IEEE 4th PIMRC*, S. 109–113, Yokohama, September 1993.